Bilinearformen

1. Aufgabe: (*Einstieg*)

Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, sowie $v_1, v_2, v_3 \in V$ und U_1, U_2 Unterräume von V. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ Wenn $\langle v_1, v_2\rangle = 0 = \langle v_2, v_3\rangle$ ist, dann gilt auch $\langle v_1, v_3\rangle = 0$.
- ☐ Wenn für alle $x \in U_1, y \in U_2$ die Bedingung $\langle x, y\rangle = 0$ gilt, dann folgt $U_1 \subseteq U_2^\perp$.
- ☐ Es gilt $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$
- ☐ Wenn $A, B \in \mathrm{Mat}(n; \mathbb{C})$ unitäre Matrizen sind, dann sind auch A^{-1}, AB und $A + B$ unitär.
- ☐ Da folgende Matrix unitär ist, gilt für ihre Determinante $|\det(A)| = 1$

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4; \mathbb{C}).$$

2. Aufgabe: (*Orthogonale Komplemente*)

Sei $V = \mathrm{Mat}(2; \mathbb{R})$ gegeben. Betrachten Sie das Skalarprodukt

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{spur}(A^\top B)$$

für 2 Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(2; \mathbb{R})$, wobei die Spur die Summe der Hauptdiagonalelemente ist.

a) Beweisen Sie die positive Definitheit von $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

b) Seien 2 Unterräume

$$U_1 \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \qquad U_2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

von V gegeben. Bestimmen Sie die orthogonalen Komplemente von $U_1, U_2, U_1 \cap U_2, U_1 + U_2$ bzgl. $\langle A, B\rangle$.

c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix des Skalarproduktes bzgl. der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

3. Aufgabe: (*Schmidtsches Orthonormierungsverfahren I*)

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Sei der Unterraum

$$U = \operatorname{span}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \operatorname{span}(\{(-1,2,2,0),(0,-1,1,1),(-1,1,3,1)\})$$

gegeben. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von U ohne vorher zu testen, ob die Vektoren linear unabhängig sind.

4. Aufgabe: (*Schmidtsches Orthonormierungsverfahren II*)

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle x,y\rangle := x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2, \quad x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist. Was ist die darstellende Matrix von der Bilinearform bezüglich der Standardbasis?

b) Sei $\|\cdot\|$ die von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm. Berechnen Sie $\|a\|$ für $a=(-2,3)$.

c) Sei $V := (\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis zu der Basis $(v_1,v_2)=(e_1,e_1-e_2)$ von V.

5. Aufgabe: (*Orthogonale Abbildung*)

Seien gegeben $B=\{1, x-1, x^2-2x+\frac{1}{3}\}\subset\mathbb{R}_2[x]$, $q=2-x$ und

$$f:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x], \qquad f(p)=p\circ q,$$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{R}_2[x]\times\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}, \qquad \langle k,r\rangle = k(0)r(0)+k(1)r(1)+k(2)r(2).$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}_2[x]$ definiert.

b) Ist B eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}_2[x]$ bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$?

c) Beweisen Sie, dass f eine orthogonale Abbildung in $(\mathbb{R}_2[x],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist.

6. Aufgabe: (*Orthogonale Matrizen*)

Es seien $v,w\in V:=\mathbb{R}^2$. Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit dem euklidischen Skalarprodukt.
Sei die Relation $\sim$ auf V gegeben durch

$$v\sim w \Leftrightarrow \text{ Es existiert ein } Q\in O(2) \text{ mit } v=Qw.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf V definiert und dass $(3,1)$ und $(1,3)$ in Relation stehen.

Eigenwerte

1. Aufgabe: (*Einstieg*)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ Wenn $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$ ähnlich zur Einheitsmatrix ist, dann ist A die Einheitsmatrix.
- ☐ Das Mimimalpolynom einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ zerfällt über $\mathbb{R}$ immer.
- ☐ Folgende Matrizen aus $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ sind in Jordanscher Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- ☐ Wenn $N \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$ nilpotent ist, dann ist N nicht diagonalisierbar.
- ☐ Das Polynom $P(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ kann man als Produkt von Linearfaktoren über $\mathbb{C}$ darstellen.

2. Aufgabe: (*Eigenwerte und Eigenvektoren*)

Sei die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (4x_1 - x_2, -x_1 + 4x_2)$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von f.

b) Begründen Sie, dass f diagonalisierbar ist.

c) Sei $B = (e_1, e_2)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und $A = M_{B,B}(f)$. Geben Sie eine Matrix $S \in GL_2(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{R})$ an, sodass

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1}.$$

d) Gibt es auch ein $S \in O(2)$, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist?

e) Geben Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von der Umkehrabbildung f^{-1} an, ohne f^{-1} auszurechnen.

3. Aufgabe: (*Beweis-Aufgaben*)

Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ ist genau dann invertierbar, wenn $\lambda = 0$ kein Eigenwert von A ist.

b) Die Menge

$$G = \left\{ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f \text{ ist ein Automorphismus und } v = (1,1) \text{ ist ein Eigenvektor von } f \right\}$$

ist eine Gruppe mit der Hintereinanderausführung von Funktionen $\circ$.

4. Aufgabe: (*Lineare Abbildung im Polynomring*)

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x], \quad \alpha_1 t + \alpha_0 \mapsto (\alpha_1 - 2\alpha_0)t + (3\alpha_1 - 4\alpha_0)$$

a) Wie sieht die darstellende Matrix $M_{B,B}(f)$ aus, wenn $B = (t+1, 2t+3)$ ist?

b) Berechnen Sie alle Eigenwerte von f.

c) Ist f diagonalisierbar?

5. Aufgabe: (*Diagonalisierbarkeit*)

Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar in $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ s^2 & s & -s \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Wie sieht jeweils das Minimalpolynom aus?

6. Aufgabe: (*Ideal*)

Es seien gegeben

$$I = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(2 - \mathrm{i}) = 0\} \qquad\qquad f(x) = x^2 - 4x + 5$$

Zeigen Sie, dass I ein Ideal in $\mathbb{R}[x]$ ist und dass $I = \langle f \rangle$ gilt (d.h., dass I ein Hauptideal von $\mathbb{R}[x]$ ist).

Lineare Abbildungen

1. Aufgabe: (*Einstieg*)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ Durch $f(1,0) = (1,0)$ und $f(0,1) = (2,0)$ ist ein eindeutiger Monomorphimus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben.
- ☐ Es gibt einen Epimorphismus $g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$.
- ☐ Wenn $A \in \mathrm{Mat}(n; \mathbb{R})$ invertierbar ist, dann gilt $\ker h_A = \{0\}$.
- ☐ Für alle $A \in \mathrm{Mat}(n; \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$ ist $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $g(x) = Ax + b$ ein Homomorphismus.

2. Aufgabe: (*Homomorphismus*)

Seien $n \in \mathbb{N}$, $V = \mathbb{R}_n[x]$, $W = \mathbb{R}_{n-1}[x]$ und

$$f : V \to W, \qquad f\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} x^i$$

gegeben.

a) Zeige, dass f ein Homomorphismus ist.

b) Wie sieht die darstellende Matrix $M_{B,B}(f)$ zur Basis

$$B = \{x^i \mid i \in \mathbb{N}, i \leq n\} \qquad \text{aus?}$$

c) Kann man V und W so abändern, dass f ein Isomorphismus ist?

d) Sei $g : W \to V$ mit

$$g\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} a_{i-1} x^i$$

Gelten die Aussagen 1) $g \circ f = \mathrm{id}_V$ und 2) $f \circ g = \mathrm{id}_W$?

3. Aufgabe: (*Epi-, Mono-, Automorphismen*)

Seien $w, z \in \mathbb{Z}$ und $f_{w,z} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_{w,z}(x) = w \cdot x + z$ gegeben.

a) Für welche $w, z \in \mathbb{Z}$ ist $f_{w,z}$ ein Homomorphismus? Wie sieht in diesen Fällen $\ker f_{w,z}$ und $\mathrm{im}\, f_{w,z}$ aus?

b) Für welche $w, z \in \mathbb{Z}$ ist $f_{w,z}$ ein Epi-, Mono- oder Automorphismus?

4. Aufgabe: (*Rang und Invertierbarkeit*)

Betrachte die Matrizen aus $V = \mathrm{Mat}(2;\mathbb{R})$, $W = \mathrm{Mat}(3;\mathbb{R})$ oder $U = \mathrm{Mat}(2,3;\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in V \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in U \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in W \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

a) Bestimme den Rang der Matrizen.

b) Was kannst du über ihre Invertierbarkeit sagen? (Berechne eine inverse Matrix.)

5. Aufgabe: (*Darstellende Matrix*)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, -3x_3, x_2 - 2x_1)$ gegeben.

a) Bestimme die darstellende Matrix $M_{B,B}(f)$ zur Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

b) Berechne die Determinante $\det(M_{B,B}(f))$.

c) Wie sieht im f aus?

d) Welche Dimension hat der Kern von f?

e) Bestimme die darstellende Martix $M_{B',B'}(f^{-1})$ der Umkehrabbildung von f^{-1} zur Basis

$$B' = \{(1,1,0), (0,2,0), (1,2,3)\}$$

6. Aufgabe: (*Lineare Gleichunssysteme*)

Bestimme die Lösungsmenge für die Gleichungssysteme

a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 4x_1 - 7x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

7. Aufgabe: (*Parameterabhängige lineare Gleichunssysteme*)

Bestimme falls möglich den Parameter $f \in \mathbb{R}$ so, dass die folgenden Gleichungssysteme 1) genau eine, 2) eine, 3) keine Lösung haben.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + fx_2 &= 2 \\ 2fx_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - fx_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Vektorräume

1. Aufgabe: (*Einstieg*)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

☐ Das Erzeugnis einer zwei-elementigen Teilmenge des $\mathbb{R}^4$ hat immer Dimension 2.

☐ Ein Erzeugendensystem eines Unterraums U von $\mathbb{R}^3$ mit $\dim(U) = 2$ hat mindestens 2 Elemente.

☐ Es gibt 2 Unterräume U_1 und U_2 des $\mathbb{R}^3$ mit $\dim(U_1) = \dim(U_2) = 2$ und $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^3$.

☐ Seien V ein Vektorraum und $v_1, v_2 \in V$. Es gilt $\operatorname{span}(\{v_1\}) + \operatorname{span}(\{v_2\}) = \operatorname{span}(\{v_1, v_2\})$.

2. Aufgabe: (*Unterräume*)

Bestimme, ob die folgenden Mengen Unterräume von $(\mathbb{C}^3, +, \cdot)$ über $\mathbb{C}$ sind.

a) $U_1 = \{(0,0,0)\}$

b) $U_2 = \{(0,3,3a) \mid a \in \mathbb{C}\}$

c) $U_3 = \{(a,0,2a-b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

d) $U_4 = \{(2a-b,a,b) \mid a,b \in \mathbb{C}\}$

e) $U_5 = \{(a,b-c,c-2) \mid a,b,c \in \mathbb{C}\}$

3. Aufgabe: (*Linearkombination*)

Sei $M = \{(1,2,6),(4,0,3),(-2,2,-2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben. Stellen Sie folgende Vektoren als Linearkombination von Vektoren aus M dar.

$$v_1 = (2,-2,2) \qquad v_2 = (1,0,0)$$
$$v_3 = (0,4,4) \qquad v_4 = (6,4,1)$$

4. Aufgabe: (*Lineare Unabhängigkeit*)

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $B = \{(2,-1,a),(-2a,a,-16)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

a) Bestimme alle a, für die B linear abhängig ist.

b) Wähle a so, dass B linear unabhängig ist und ergänze B zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

5. Aufgabe: (*Basis und Dimension*)

Stelle jeweils eine Basis der folgenden Vektorräume auf. Welche Dimension haben sie?

a)
$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2; \mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $V_2 = \{(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z \in \mathbb{R}, y = 2z\}$

c) $V_3 = \{(2c - a, 2a, b - c, d) \in \mathbb{C}^4 \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$

6. Aufgabe: (*Basisergänzung*)

Ergänze die folgenden Mengen M_i zu einer Basis des angegebenen Vektorraums V.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $M_1 = \{(5, 4, 3), (2, 1, 0)\}$

b) $V = \mathbb{C}^3$, $M_2 = \{(1, \mathrm{i}, 0)\}$

c) $V = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(5) = 0\}$, $M_3 = \{x - 5\}$

d) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2; \mathbb{R}) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, $M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$