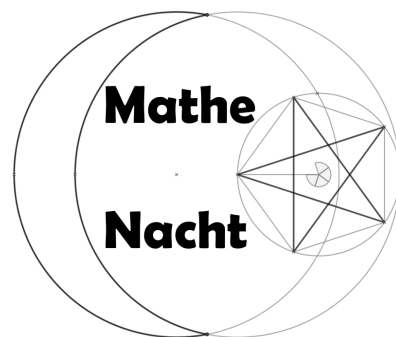
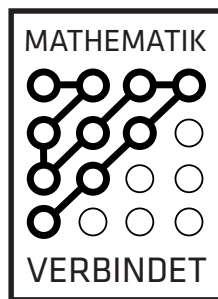


Bilinearformen



1. Aufgabe: (Einstieg)

Seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, sowie $v_1, v_2, v_3 \in V$ und U_1, U_2 Unterräume von V . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Wenn $\langle v_1, v_2 \rangle = 0 = \langle v_2, v_3 \rangle$ ist, dann gilt auch $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$.
- Wenn für alle $x \in U_1, y \in U_2$ die Bedingung $\langle x, y \rangle = 0$ gilt, dann folgt $U_1 \subseteq U_2^\perp$.
- Es gilt $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$
- Wenn $A, B \in \text{Mat}(n; \mathbb{C})$ unitäre Matrizen sind, dann sind auch A^{-1} , AB und $A + B$ unitär.
- Da folgende Matrix unitär ist, gilt für ihre Determinante $|\det(A)| = 1$

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \in \text{Mat}(4; \mathbb{C}).$$

2. Aufgabe: (Orthogonale Komplemente)

Sei $V = \text{Mat}(2; \mathbb{R})$ gegeben. Betrachten Sie das Skalarprodukt

$$\langle A, B \rangle := \text{spur}(A^\top B)$$

für 2 Matrizen $A, B \in \text{Mat}(2; \mathbb{R})$, wobei die Spur die Summe der Hauptdiagonalelemente ist.

a) Beweisen Sie die positive Definitheit von $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

b) Seien 2 Unterräume

$$U_1 \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad U_2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

von V gegeben. Bestimmen Sie die orthogonalen Komplemente von $U_1, U_2, U_1 \cap U_2, U_1 + U_2$ bzgl. $\langle A, B \rangle$.

c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix des Skalarproduktes bzgl. der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

3. Aufgabe: (*Schmidtsches Orthonormierungsverfahren I*)

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Sei der Unterraum

$$U = \text{span}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \text{span}(\{(-1, 2, 2, 0), (0, -1, 1, 1), (-1, 1, 3, 1)\})$$

gegeben. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von U ohne vorher zu testen, ob die Vektoren linear unabhängig sind.

4. Aufgabe: (*Schmidtsches Orthonormierungsverfahren II*)

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle x, y \rangle := x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2, \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 definiert ist. Was ist die darstellende Matrix von der Bilinearform bezüglich der Standardbasis?

b) Sei $\|\cdot\|$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm. Berechnen Sie $\|a\|$ für $a = (-2, 3)$.

c) Sei $V := (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis zu der Basis $(v_1, v_2) = (e_1, e_1 - e_2)$ von V .

5. Aufgabe: (*Orthogonale Abbildung*)

Seien gegeben $B = \{1, x - 1, x^2 - 2x + \frac{1}{3}\} \subset \mathbb{R}_2[x]$, $q = 2 - x$ und

$$f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x], \quad f(p) = p \circ q,$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle k, r \rangle = k(0)r(0) + k(1)r(1) + k(2)r(2).$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}_2[x]$ definiert.

b) Ist B eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}_2[x]$ bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$?

c) Beweisen Sie, dass f eine orthogonale Abbildung in $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist.

6. Aufgabe: (*Orthogonale Matrizen*)

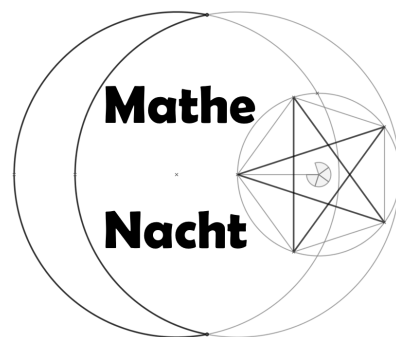
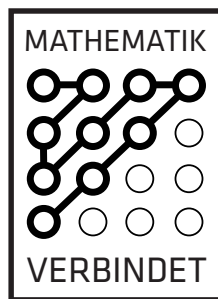
Es seien $v, w \in V := \mathbb{R}^2$. Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit dem euklidischen Skalarprodukt.

Sei die Relation \sim auf V gegeben durch

$$v \sim w \Leftrightarrow \text{Es existiert ein } Q \in O(2) \text{ mit } v = Qw.$$

Zeigen Sie, dass \sim eine Äquivalenzrelation auf V definiert und dass $(3, 1)$ und $(1, 3)$ in Relation stehen.

Eigenwerte



1. Aufgabe: (Einstieg)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Wenn $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{C})$ ähnlich zur Einheitsmatrix ist, dann ist A die Einheitsmatrix.
- Das Minimalpolynom einer Matrix $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ zerfällt über \mathbb{R} immer.
- Folgende Matrizen aus $\text{Mat}(n; \mathbb{R})$ sind in Jordanscher Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Wenn $N \in \text{Mat}(n; \mathbb{C})$ nilpotent ist, dann ist N nicht diagonalisierbar.
- Das Polynom $P(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ kann man als Produkt von Linearfaktoren über \mathbb{C} darstellen.

2. Aufgabe: (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Sei die lineare Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (4x_1 - x_2, -x_1 + 4x_2)$$

gegeben.

- a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von f .
- b) Begründen Sie, dass f diagonalisierbar ist.
- c) Sei $B = (e_1, e_2)$ die Standardbasis des \mathbb{R}^2 und $A = M_{B,B}(f)$. Geben Sie eine Matrix $S \in GL_2(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \text{Mat}(2; \mathbb{R})$ an, sodass

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1}.$$

- d) Gibt es auch ein $S \in O(2)$, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist?
- e) Geben Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von der Umkehrabbildung f^{-1} an, ohne f^{-1} auszurechnen.

3. Aufgabe: (Beweis-Aufgaben)

Beweisen Sie folgende Aussagen.

- a) Eine Matrix $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ ist genau dann invertierbar, wenn $\lambda = 0$ kein Eigenwert von A ist.
- b) Die Menge

$$G = \{f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f \text{ ist ein Automorphismus und } v = (1, 1) \text{ ist ein Eigenvektor von } f\}$$

ist eine Gruppe mit der Hintereinanderausführung von Funktionen \circ .

4. Aufgabe: (*Lineare Abbildung im Polynomring*)

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x], \quad \alpha_1 t + \alpha_0 \mapsto (\alpha_1 - 2\alpha_0)t + (3\alpha_1 - 4\alpha_0)$$

- a) Wie sieht die darstellende Matrix $M_{B,B}(f)$ aus, wenn $B = (t + 1, 2t + 3)$ ist?
- b) Berechnen Sie alle Eigenwerte von f .
- c) Ist f diagonalisierbar?

5. Aufgabe: (*Diagonalisierbarkeit*)

Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar in $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ s^2 & s & -s \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Wie sieht jeweils das Minimalpolynom aus?

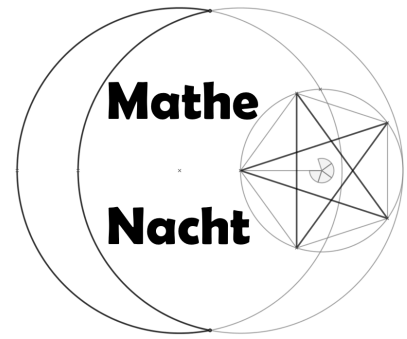
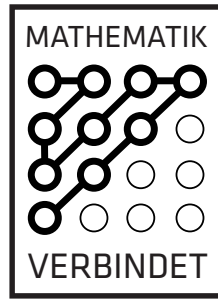
6. Aufgabe: (*Ideal*)

Es seien gegeben

$$I = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(2 - i) = 0\} \quad f(x) = x^2 - 4x + 5$$

Zeigen Sie, dass I ein Ideal in $\mathbb{R}[x]$ ist und dass $I = \langle f \rangle$ gilt (d.h., dass I ein Hauptideal von $\mathbb{R}[x]$ ist).

Lineare Abbildungen



1. Aufgabe: (Einstieg)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Durch $f(1,0) = (1,0)$ und $f(0,1) = (2,0)$ ist ein eindeutiger Monomorphismus $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben.
- Es gibt einen Epimorphismus $g: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- Wenn $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ invertierbar ist, dann gilt $\ker h_A = \{0\}$.
- Für alle $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$ ist $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $g(x) = Ax + b$ ein Homomorphismus.

2. Aufgabe: (Homomorphismus)

Seien $n \in \mathbb{N}, V = \mathbb{R}_n[x], W = \mathbb{R}_{n-1}[x]$ und

$$f: V \rightarrow W, \quad f\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)a_{i+1}x^i$$

gegeben.

- a) Zeige, dass f ein Homomorphismus ist.
- b) Wie sieht die darstellende Matrix $M_{B,B}(f)$ zur Basis

$$B = \{x^i \mid i \in \mathbb{N}, i \leq n\} \quad \text{aus?}$$

- c) Kann man V und W so abändern, dass f ein Isomorphismus ist?
- d) Sei $g: W \rightarrow V$ mit

$$g\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} a_{i-1} x^i$$

Gelten die Aussagen 1) $g \circ f = \text{id}_V$ und 2) $f \circ g = \text{id}_W$?

3. Aufgabe: (Epi-, Mono-, Automorphismen)

Seien $w, z \in \mathbb{Z}$ und $f_{w,z}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_{w,z}(x) = w \cdot x + z$ gegeben.

- a) Für welche $w, z \in \mathbb{Z}$ ist $f_{w,z}$ ein Homomorphismus? Wie sieht in diesen Fällen $\ker f_{w,z}$ und $\text{im } f_{w,z}$ aus?
- b) Für welche $w, z \in \mathbb{Z}$ ist $f_{w,z}$ ein Epi-, Mono- oder Automorphismus?

4. Aufgabe: (*Rang und Invertierbarkeit*)

Betrachte die Matrizen aus $V = \text{Mat}(2; \mathbb{R})$, $W = \text{Mat}(3; \mathbb{R})$ oder $U = \text{Mat}(2, 3; \mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in V \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in U \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in W \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

- a) Bestimme den Rang der Matrizen.
- b) Was kannst du über ihre Invertierbarkeit sagen? (Berechne eine inverse Matrix.)

5. Aufgabe: (*Darstellende Matrix*)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, -3x_3, x_2 - 2x_1)$ gegeben.

- a) Bestimme die darstellende Matrix $M_{B,B}(f)$ zur Standardbasis des \mathbb{R}^3 .
- b) Berechne die Determinante $\det(M_{B,B}(f))$.
- c) Wie sieht im f aus?
- d) Welche Dimension hat der Kern von f ?
- e) Bestimme die darstellende Matrix $M_{B',B'}(f^{-1})$ der Umkehrabbildung von f^{-1} zur Basis

$$B' = \{(1, 1, 0), (0, 2, 0), (1, 2, 3)\}$$

6. Aufgabe: (*Lineare Gleichungssysteme*)

Bestimme die Lösungsmenge für die Gleichungssysteme

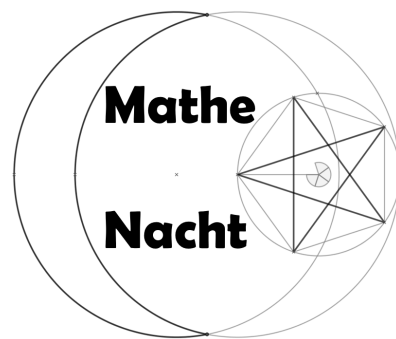
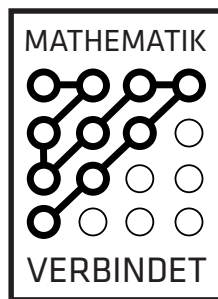
- | | | |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------|
| a) | b) | c) |
| $x_1 + x_2 + x_3 = -2$ | $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$ | $4x_1 - 7x_2 + x_3 = 0$ |
| $x_2 + x_3 = 3$ | $-x_1 + x_2 - x_3 = 3$ | $-x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0$ |
| $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1$ | $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ | $-2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0$ |
| | $x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$ | |

7. Aufgabe: (*Parameterabhängige lineare Gleichungssysteme*)

Bestimme falls möglich den Parameter $f \in \mathbb{R}$ so, dass die folgenden Gleichungssysteme 1) genau eine, 2) eine, 3) keine Lösung haben.

- | | |
|--------------------|---------------------------|
| a) | b) |
| $x_1 + fx_2 = 2$ | $-2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ |
| $2fx_1 + 2x_2 = 4$ | $5x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$ |
| | $x_1 - fx_2 + 3x_3 = 0$ |

Vektorräume



1. Aufgabe: (*Einstieg*)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Das Erzeugnis einer zwei-elementigen Teilmenge des \mathbb{R}^4 hat immer Dimension 2.
- Ein Erzeugendensystem eines Unterraums U von \mathbb{R}^3 mit $\dim(U) = 2$ hat mindestens 2 Elemente.
- Es gibt 2 Unterräume U_1 und U_2 des \mathbb{R}^3 mit $\dim(U_1) = \dim(U_2) = 2$ und $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^3$.
- Seien V ein Vektorraum und $v_1, v_2 \in V$. Es gilt $\text{span}(\{v_1\}) + \text{span}(\{v_2\}) = \text{span}(\{v_1, v_2\})$.

2. Aufgabe: (*Unterräume*)

Bestimme, ob die folgenden Mengen Unterräume von $(\mathbb{C}^3, +, \cdot)$ über \mathbb{C} sind.

- a) $U_1 = \{(0, 0, 0)\}$
- b) $U_2 = \{(0, 3, 3a) \mid a \in \mathbb{C}\}$
- c) $U_3 = \{(a, 0, 2a - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
- d) $U_4 = \{(2a - b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{C}\}$
- e) $U_5 = \{(a, b - c, c - 2) \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$

3. Aufgabe: (*Linearkombination*)

Sei $M = \{(1, 2, 6), (4, 0, 3), (-2, 2, -2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben. Stellen Sie folgende Vektoren als Linearkombination von Vektoren aus M dar.

$$\begin{array}{ll} v_1 = (2, -2, 2) & v_2 = (1, 0, 0) \\ v_3 = (0, 4, 4) & v_4 = (6, 4, 1) \end{array}$$

4. Aufgabe: (*Lineare Unabhängigkeit*)

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $B = \{(2, -1, a), (-2a, a, -16)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

- a) Bestimme alle a , für die B linear abhängig ist.
- b) Wähle a so, dass B linear unabhängig ist und ergänze B zu einer Basis von \mathbb{R}^3 .

5. Aufgabe: (*Basis und Dimension*)

Stelle jeweils eine Basis der folgenden Vektorräume auf. Welche Dimension haben sie?

a)

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2; \mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $V_2 = \{(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z \in \mathbb{R}, y = 2z\}$

c) $V_3 = \{(2c - a, 2a, b - c, d) \in \mathbb{C}^4 \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$

6. Aufgabe: (*Basisergänzung*)

Ergänze die folgenden Mengen M_i zu einer Basis des angegebenen Vektorraums V .

a) $V = \mathbb{R}^3$, $M_1 = \{(5, 4, 3), (2, 1, 0)\}$

b) $V = \mathbb{C}^3$, $M_2 = \{(1, i, 0)\}$

c) $V = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(5) = 0\}$, $M_3 = \{x - 5\}$

d) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2; \mathbb{R}) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, $M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$